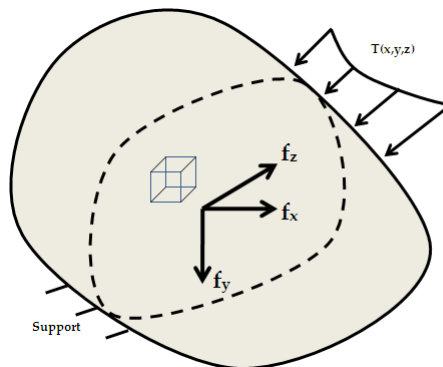


5. Analisa Benda Pejal Elastik 2-Dimensi

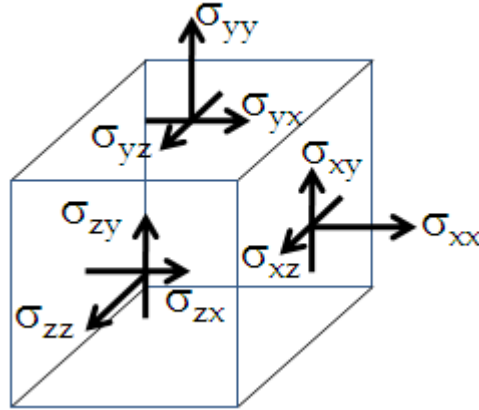
5.1 Dasar Kontinuum Mekanik Benda Pejal (*Solid*)

Pada bab ini kita akan mempelajari penerapan Metode Elemen Hingga untuk analisa tegangan dan regangan benda pejal yang terbebani. Jika benda padat terbebani maka setiap bagian dari benda itu akan mengalami tegangan dan regangan (*pergeseran*). Gambar 5.1 menggambarkan situasi suatu benda padat yang terbebani.



Gambar 5.1 Benda padat yang terbebani.

Tegangan pada setiap bagian dari benda ini dapat dianalisa dengan menggunakan elemen tegangan (*stress element*) seperti digambarkan oleh Gambar 5.2.



Gambar 5.2 Elemen tegangan.

Agar elemen berada dalam kondisi equilibrium maka $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ dan $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Dengan menggunakan notasi vektor elemental tegangan dapat dituliskan

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{xy}\} \quad (5.1)$$

Dengan analisa yang sama elemental regangan dapat dituliskan dengan menggunakan notasi vektor.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{xy}\} \quad (5.2)$$

Apabila tegangan hanya menyebabkan pergeseran yang kecil dan saat beban diiadakan benda kembali ke bentuk asal seperti sebelum terbebani, benda dikatakan masih berada dalam sifat elastik. Pada regime elastik hubungan antara tegangan, σ dan regangan, ε mengikuti hukum *Hooke*.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & \text{sym.} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

atau dalam bentuk matrik

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (5.4)$$

Pada persamaan (5.4) $[C]$ adalah matrik konstitutif bahan (*material constitutive law*). Elemen dari matrik konstitutif ini ditentukan dari eksperimen. Untuk benda isotropik, Young's modulus, E dan Poisson's ratio, ν merata pada semua arah. Untuk materi ini hubungan antara tegangan dan regangan diberikan oleh Hukum Hooke.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad (5.10)$$

Dimana G adalah modulus geser isotropik (*isotropic shear modulus*) yang diberikan oleh

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.11)$$

Persamaan-persamaan (5.5) – (5.10) memberikan matrik konstitutif [C],

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

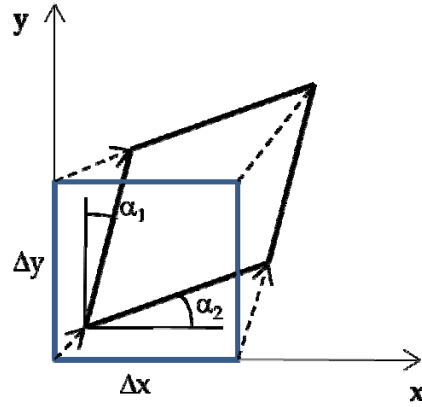
Dengan MEH, solusi yang dihitung adalah pergeseran node. Jadi setiap node terdiri 3 *dof*, u_x , u_y dan u_z . Hubungan antara regangan, ε dan derivatif pergeseran adalah

$$\varepsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x+\Delta x, y, z) - u_x(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u_y(x, y+\Delta y, z) - u_y(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{zz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u_z(x, y, z+\Delta z) - u_z(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.15)$$

Regangan geser (*shear strain*) didefinisikan sebagai perubahan sudut suatu elemen sebagai akibat dari beban. Gambar 5.3 memberikan ilustrasi sudut-sudut ini.



Gambar 5.3 Perubahan sudut suatu elemen yang terbebani.

Regangan geser, ε_{xy} diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xy} &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u_x(x, y + \Delta y, x) - u_x(x, y, z)}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_y(x + \Delta x, y, x) - u_y(x, y, z)}{\Delta x} \\
 &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Dengan cara yang sama regangan geser yang lain dapat diturunkan sebagai berikut.

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \tag{5.17}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{5.18}$$

Hubungan antara regangan dan derivatif pergeseran (5.13) – (5.18) dapat dituliskan dengan menggunakan notasi matrik berikut.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

5.2 Analisa Tegangan Bidang (*Plane Stress Analysis*)

Untuk benda pejal yang mempunyai ketebalan yang kecil dibandingkan dengan ukuran penampang dan beban hanya berada pada bidang penampang, maka tegangan pada arah tegak lurus dari penampang adalah nol. Untuk bidang xy , $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$. Dengan asumsi $\sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$, persamaan *Hooke* untuk problem tegangan bidang (*plane stress*) diberikan oleh,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Untuk analisa tegangan bidang, matrik konstitutifnya adalah

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

5.3 Analisa Regangan Bidang (*Plane Strain Analysis*)

Untuk benda pejal yang mempunyai ketebalan yang besar dibandingkan dengan ukuran penampang dan beban hanya berada pada bidang penampang, maka regangan pada arah tegak lurus dari penampang adalah nol. Jika bidang penampang adalah bidang xy , $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$. Hukum *Hooke* untuk problem regangan bidang diberikan oleh

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Untuk analisa regangan bidang, matrik konstitutifnya adalah

$$[C] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

5.4 Formulasi MEH: Elemen Segitiga Linear

Ada dua teknik yang umum digunakan untuk menurunkan formulasi MEH problem elastik: 1) minimum potensial energi (*Bab 2 dan Bab 3*), dan 2) Metode Galerkin. Pada bab ini kita akan menggunakan pendekatan minimum potensial energi.

Pertama-tama strain diekspresikan dengan pergeseran pada node. Untuk elemen segitiga linear pergeseran pada elemen diberikan oleh persamaan (4.36)

$$u_x^{(e)} = S_1 u_{x1} + S_2 u_{x2} + S_3 u_{x3} \quad (5.24)$$

$$u_y^{(e)} = S_1 u_{y1} + S_2 u_{y2} + S_3 u_{y3} \quad (5.25)$$

Dengan menggunakan (5.24) dan (5.25) regangan dihitung

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial y} \\ \frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan S_1 , S_2 dan S_3 yang telah diberikan oleh (4.37) – (4.39) pada (5.26) kita peroleh

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \\ \delta_1 & \beta_1 & \delta_2 & \beta_2 & \delta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Atau secara singkat dapat dituliskan dengan menggunakan notasi matrik

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{U}\} \quad (5.28)$$

Matrik $[\mathbf{B}]$ dikenal sebagai matrik regangan (*strain matrix*). Disini jelas bahwa dengan menggunakan elemen linear segitiga, hanya ada satu nilai regangan pada elemen, oleh karenanya elemen ini dikenal dengan elemen regangan konstan (*constant strain element*). Untuk menghitung energi potensial, diperlukan energi regangan yang tersimpan pada benda (*lihat persamaan 3.1*). Dengan menggunakan (3.1) energi regangan yang tersimpan pada benda adalah

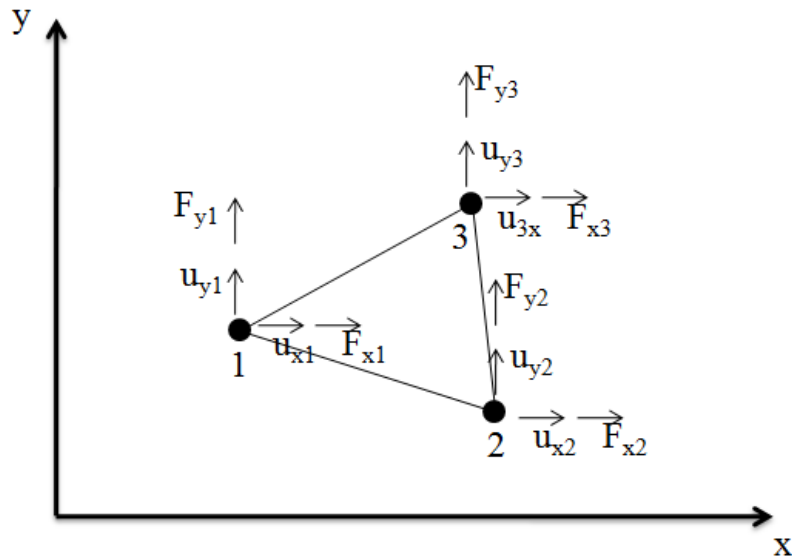
$$\begin{aligned}
\Lambda^{(e)} &= \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dv \\
&= \frac{1}{2} \int_V ([\mathbf{C}][\boldsymbol{\varepsilon}])^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \, dv \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}]^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \, dv \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}] \, dv
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Perhatikan bahwa $([\mathbf{C}][\boldsymbol{\varepsilon}])^T = [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}]^T$ dan $[\mathbf{C}]^T = [\mathbf{C}]$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan (5.28) ke (5.29) diperoleh

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] \, dv \tag{5.30}$$

Kerja pada badan ini dihitung dengan mengalikan gaya pada node dengan pergeseran node (lihat Gambar 5.4).

$$\begin{aligned}
W^{(e)} &= u_{x1} F_{x1} + u_{y1} F_{y1} + u_{x2} F_{x2} + u_{y2} F_{y2} + u_{x3} F_{x3} + u_{y3} F_{y3} \\
&= [\mathbf{U}]^T [\mathbf{F}]
\end{aligned} \tag{5.31}$$



Gambar 5.4 Gaya dan pergeseran pada node elemen segitiga.

Energi potensial total elemen diberikan oleh

$$\begin{aligned}\Pi^{(e)} &= \Lambda^{(e)} - W^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] dV - [\mathbf{U}]^T [\mathbf{F}]\end{aligned}\quad (5.32)$$

Dengan meminimumkan $\Pi^{(e)}$ akan diperoleh sistim persamaan linear berikut.

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right] = V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] - [\mathbf{F}] = 0 \quad (5.33)$$

atau

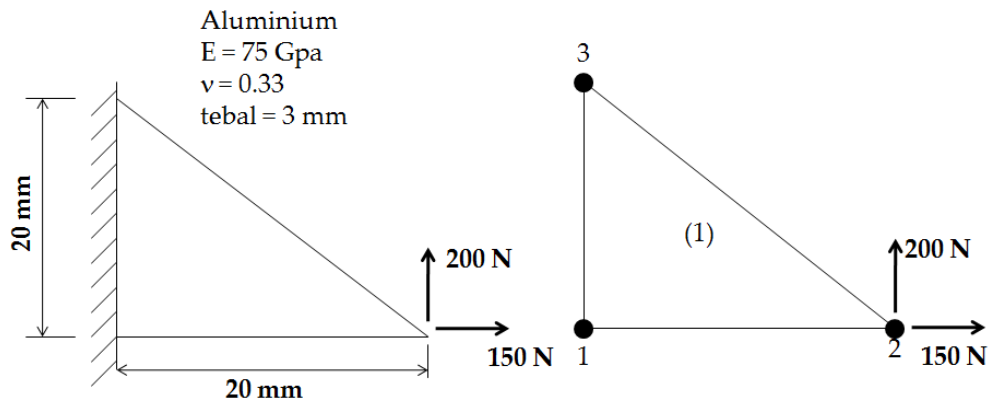
$$[\mathbf{K}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad (5.34)$$

dimana $[\mathbf{K}]$ adalah matrik kekakuan.

----- CONTOH 5.1 -----

Suatu plat yang tersangga dan terbebani pada salah satu ujung mengalami pergeseran. Jika pergeseran maksimum dari plat tidak boleh melebihi 10 μm , **hitung**:

- Pergeseran maksimum plat,
- apakah ada kemungkinan plat untuk berubah bentuk secara permanen (*plastic deformation*), dan
- perkiraan perubahan ketebalan plat pada saat terbebani.



Karena ketebalan plat lebih kecil dari seperlima dimensi penampang problem ini dapat disederhanakan sebagai problem tegangan bidang. Pada contoh ini kita hanya menggunakan satu elemen.

Untuk menghitung matrik kekakuan $[K]$, pertama-tama kita hitung matrik konstitutif dengan menggunakan (5.21).

$$[C]^{(1)} = \frac{75.000}{1-0,33^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,33}{2} \end{bmatrix} = 688,7e^3 \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,33}{2} \end{bmatrix}$$

Dengan area, $A = 200 \text{ mm}^2$ dan isi, $V = 600 \text{ mm}^3$ selanjutnya elemen-elemen matrik $[B]$ dihitung dengan menggunakan koordinat node 1(0,0), 2(20,0) dan 3(0,20),

$$\begin{aligned} \beta_1 &= y_2 - y_3 = 0 - 20 = -20 & \delta_1 &= x_3 - x_2 = 0 - 20 = -20 \\ \beta_2 &= y_3 - y_1 = 20 - 0 = 20 & \delta_2 &= x_1 - x_3 = 0 - 0 = 0 \\ \beta_3 &= y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0 & \delta_3 &= x_2 - x_1 = 20 - 0 = 20 \end{aligned}$$

Matrik $[B]$ menurut (5.27),

$$[B]^{(1)} = 0,0025 \begin{bmatrix} -20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & -20 & 0 & 20 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah $[B]$ dan $[C]$ diperoleh, $[K]$ dapat dihitung

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]^{(1)} &= 600 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \\
 &= 1e^6 \begin{bmatrix} 1,3791 & 0,6870 & -1,0331 & -0,3461 & -0,3461 & -0,3409 \\ 0,687 & 1,3791 & -0,3409 & -0,3461 & -0,3461 & -1,0331 \\ -1,0331 & -0,3409 & 1,0331 & 0 & 0 & 0,3409 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3409 & -1,0331 & 0,3409 & 0 & 0 & 1,0331 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dan sistim persamaan yang diperoleh adalah

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,3791 & 0,6870 & -1,0331 & -0,3461 & -0,3461 & -0,3409 \\ 0,687 & 1,3791 & -0,3409 & -0,3461 & -0,3461 & -1,0331 \\ -1,0331 & -0,3409 & 1,0331 & 0 & 0 & 0,3409 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3409 & -1,0331 & 0,3409 & 0 & 0 & 1,0331 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

Karena $u_{x1} = u_{y1} = u_{x2} = u_{y2} = 0$ dan $F_{x2} = 150$ N dan $F_{y2} = 200$ N, lajur satu, dua, lima dan enam dapat dieliminasi dari sistim.

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,0331 & 0 \\ 0 & 0,3461 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

a) **Pergeseran maksimum plat**

Solusi dari sistim persamaan ini memberikan pergeseran titik beban (*node 2*).

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = 1e^{-4} \begin{Bmatrix} 1,4519 \\ 5,7787 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

Dengan menggunakan jawaban ini, gaya-gaya reaksi pada node 1 dan 3 dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai u_{x2} dan u_{y2} ke sistim persamaan di atas. Gaya-gaya reaksi ini adalah

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -350 \\ 200 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Verifikasikan hasil ini dengan menggunakan analisa statik.

b) Kemungkinan berubah bentuk secara permanen

Untuk mengetahui apakah beban yang ada akan membuat plat berubah bentuk secara permanen, kita perlu mengetahui tegangan pada elemen. Dengan mensubstitusikan (5.21) dan (5.28) ke (5.20) kita bisa peroleh

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}][\mathbf{B}][\mathbf{U}] = \begin{Bmatrix} 5 \\ 1,65 \\ 6,67 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Dari tegangan ini bisa diperoleh tegangan von Mises (*von Mises stress*), σ' berdasarkan tegangan elemen yang telah dihitung diatas.

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 1,65^2 - 5(1,65) + 3(6,67)^2} \\ &= 12,37 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Jika tegangan yield (*yield stress*) aluminium berkisar antara 15 – 20 MPa, karena nilai von Misses stress ini lebih kecil dari yield stress aluminium menurut teori, plat tidak akan berubah bentuk secara permanen. Namun dalam praktek kemungkinan plat berubah bentuk cukup besar dikarenakan adanya defek pada bahan atau variasi dari beban.

(c) Perkiraan perubahan ketebalan plat

Besarnya penipisan dari plat dapat diaproksimasikan dengan menggunakan persamaan (5.7).

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -0,33 \frac{5}{75,000} - 0,33 \frac{1,65}{75,000} + \frac{0}{75,000} = 29,26e^{-6}$$

Jadi perubahan tipis plat adalah

$$\Delta z = 29,26e^{-6} \times 3 = 87,87e^{-6} \text{ mm}$$

5.5 Formulasi MEH: Elemen Linear Segiempat

Untuk elemen segiempat linear, pergeseran pada elemen diberikan oleh persamaan (4.21). Dan pergeseran x dan y diberikan oleh

$$u_x^{(e)} = S_1 u_{x1} + S_2 u_{x2} + S_3 u_{x3} + S_4 u_{x4} \quad (5.35)$$

$$u_y^{(e)} = S_1 u_{y1} + S_2 u_{y2} + S_3 u_{y3} + S_4 u_{y4} \quad (5.36)$$

Dengan menggunakan (5.35) dan (5.36) regangan dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial y} \\ \frac{\partial S_1}{\partial y} & \frac{\partial S_1}{\partial x} & \frac{\partial S_2}{\partial y} & \frac{\partial S_2}{\partial x} & \frac{\partial S_3}{\partial y} & \frac{\partial S_3}{\partial x} & \frac{\partial S_4}{\partial y} & \frac{\partial S_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

Bentuk umum dari fungsi bobot S_1 , S_2 , S_3 dan S_4 diberikan pada koordinat natural (ξ, η) . Untuk fungsi-fungsi bobot ini derivative parsialnya diperoleh dengan menggunakan aturan rantai.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

Dengan menggunakan (5.38) untuk derivative parsial pada (5.37) vektor regangan dapat dituliskan.

$$[\epsilon] = [A] [D] [U] \quad (5.39)$$

dimana,

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Dan

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial S_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial S_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Elemen-elemen $[D]$ dapat diperoleh dari penurunan fungsi-fungsi bobot (4.29) – (4.32).

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Untuk mendapatkan elemen-elemen dari matrik $[\mathbf{A}]$ diperlukan matrik transformasi yang dikenal sebagai matrik *Jacobian* $[\mathbf{J}]$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$[\mathbf{J}]$

Dengan membandingkan (5.38) dengan (5.43) kita bisa dapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Matrik $[\mathbf{J}]$ dapat dihitung

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{S}_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{S}_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{S}_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{S}_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

dan

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Selanjutnya matrik $[A]$ dapat dihitung dari

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Setelah $[A]$ diperoleh kita dapat hitung energi regangan elemen berikut.

$$\begin{aligned} \Lambda^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_v [\epsilon]^T [C] [\epsilon] dv \\ &= \frac{1}{2} t \int_A ([A][D][U])^T [C][A][D][U] dA \\ &= \frac{1}{2} t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [U]^T [D]^T [A]^T [C][A][D][U] |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.48)$$

Kerja pada elemen

$$\begin{aligned} W^{(e)} &= u_{x1} F_{x1} + u_{y1} F_{y1} + u_{x2} F_{x2} + u_{y2} F_{y2} + u_{x3} F_{x3} + u_{y3} F_{y3} + u_{x4} F_{x4} + u_{y4} F_{y4} \\ &= [U]^T [F] \end{aligned} \quad (5.49)$$

dan energi potensial total

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= \Lambda^{(e)} - W^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [U]^T [D]^T [A]^T [C][A][D][U] |J| d\xi d\eta - [U]^T [F] \end{aligned} \quad (5.50)$$

Dengan meminimumkan energi potensial total kita peroleh sistim persamaan linear berikut.

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial U} \right] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [D]^T [A]^T [C][A][D][U] |J| d\xi d\eta - [F] = 0 \quad (5.51)$$

atau

$$[\mathbf{K}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad (5.52)$$

Dimana $[\mathbf{K}]$ adalah matrik kekakuan dimana dalam hal ini merupakan integral yang umumnya dihitung secara numerik dengan menggunakan empat titik Gauss (*Gambar 4.24*).

----- **CONTOH 5.2** -----

Pada contoh ini kita ulangi contoh 5.1 tetapi dengan plat segiempat.

Karena ketebalan plat lebih kecil dari seperlima dimensi penampang problem ini dapat disederhanakan sebagai problem tegangan bidang. Pada contoh ini kita hanya gunakan satu elemen.

Untuk menghitung matrik kekakuan $[\mathbf{K}]$, pertama-tama kita hitung matrik konstitutifnya dengan menggunakan (5.21).

$$[\mathbf{C}]^{(1)} = \frac{75.000}{1-0,33^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,33}{2} \end{bmatrix} = 688,7e^3 \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,33}{2} \end{bmatrix}$$

Guna menghitung integral (5.51), kita gunakan integrasi numerik dengan menggunakan 4 titik Gauss (*Gambar 4.24*). Untuk setiap titik ini kita hitung matrik $[\mathbf{D}]$ dan $[\mathbf{A}]$.

Titik Gauss 1: $\xi = -0,57735$, $\eta = -0,57735$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}]_1 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1+0,577) & 0 & (1+0,577) & 0 & (1-0,577) & 0 & -(1-0,577) & 0 \\ -(1+0,577) & 0 & -(1-0,577) & 0 & (1-0,577) & 0 & (1+0,577) & 0 \\ 0 & -(1+0,577) & 0 & (1+0,577) & 0 & (1-0,577) & 0 & -(1-0,577) \\ 0 & -(1+0,577) & 0 & -(1-0,577) & 0 & (1-0,577) & 0 & (1+0,577) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0,394 & 0 & 0,394 & 0 & 0,106 & 0 & -0,106 & 0 \\ -0,394 & 0 & -0,106 & 0 & 0,106 & 0 & 0,394 & 0 \\ 0 & -0,394 & 0 & 0,394 & 0 & 0,106 & 0 & -0,106 \\ 0 & -0,394 & 0 & -0,106 & 0 & 0,106 & 0 & 0,394 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}]_1 &= \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 30 & 20 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0,394 & 0,394 & 0,106 & -0,106 \\ -0,394 & -0,106 & 0,106 & 0,394 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 30 & 20 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Determinan $|\mathbf{J}|_1 = 150$

$$[\mathbf{A}]_1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|_1} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]_1 = t[\mathbf{D}]_1^T [\mathbf{A}]_1^T [\mathbf{C}] [\mathbf{A}]_1 [\mathbf{D}]_1 | \mathbf{J} |_1$$

$$= 1e^4 \begin{bmatrix} 4,591 & 2,611 & -2,089 & -0,968 & -1,230 & -0,699 & -1,272 & -0,943 \\ 2,611 & 6,767 & -0,943 & 0,701 & -0,699 & -1,813 & -0,968 & -5,655 \\ -2,089 & -0,943 & 2,759 & -0,699 & 0,559 & 0,253 & -1,230 & 1,390 \\ -0,968 & 0,701 & -0,699 & 1,299 & 0,259 & -0,188 & 1,408 & -1,813 \\ -1,230 & 0,699 & 0,559 & 0,259 & 0,330 & 0,188 & 0,341 & 0,253 \\ -0,699 & -1,813 & 0,253 & -0,188 & 0,188 & 0,486 & 0,259 & 1,515 \\ -1,272 & -0,968 & -1,230 & 1,408 & 0,341 & 0,259 & 2,161 & -0,699 \\ -0,943 & -5,655 & 1,390 & -1,810 & 0,253 & 1,515 & -0,699 & 5,953 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama matrik $[\mathbf{K}]_2$, $[\mathbf{K}]_3$ dan $[\mathbf{K}]_4$ dihitung. Matrik $[\mathbf{K}]^{(1)}$ adalah jumlah semua $[\mathbf{K}]$ pada titik Gauss.

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = 1e^5 \begin{bmatrix} 2,952 & 1,259 & -1,049 & -0,010 & -1,476 & -1,259 & -0,427 & 0,010 \\ 1,259 & 4,351 & 0,010 & 1,330 & -1,259 & -2,176 & -0,010 & -3,506 \\ -1,049 & 0,010 & 2,952 & -1,259 & -0,427 & -0,010 & -1,476 & 1,259 \\ -0,009 & 1,330 & -1,259 & 4,351 & 0,010 & -3,506 & 1,259 & -2,176 \\ -1,476 & -1,259 & -0,427 & 0,010 & 2,952 & 1,259 & -1,049 & -0,010 \\ -1,259 & -2,176 & -0,010 & -3,506 & 1,259 & 4,351 & 0,010 & 1,330 \\ -0,427 & -0,010 & -1,476 & 1,259 & -1,049 & 0,010 & 2,952 & -1,259 \\ 0,010 & -3,506 & 1,259 & -2,176 & -0,010 & 1,330 & -1,259 & 4,351 \end{bmatrix}$$

a) Pergeseran maksimum plat

Karena $u_{x1} = u_{y1} = u_{x4} = u_{y4} = 0$ dan $F_{x2} = 150$ N dan $F_{y3} = 200$ N, lajur satu, dua, tujuh dan delapan dapat dieliminasi dari sistim.

$$1e^5 \begin{bmatrix} 2,952 & -1,259 & -0,427 & -0,010 \\ -1,259 & 4,351 & 0,010 & -3,506 \\ -0,427 & 0,010 & 2,952 & 1,259 \\ -0,010 & -3,506 & 1,259 & 4,351 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Solusi dari sistim persamaan ini memberikan pergeseran titik-titik beban (*node 2 dan 3*).

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = 1e^{-3} \begin{Bmatrix} 1,8 \\ 3,4 \\ -1,3 \\ 3,6 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

Pergeseran maksimum terjadi pada node 2. Dengan menggunakan hasil ini, gaya-gaya reaksi pada node 1 dan 3 dapat dihitung dengan mensubstitusikan nilai u_{x2} , u_{y2} , u_{x3} dan u_{y3} ke sistim persamaan $[K][U]=[F]$. Gaya-gaya reaksi yang diperoleh adalah

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60 \\ 45 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Sebagai latihan verifikasikan hasil ini dengan menggunakan analisa statik.

b) Kemungkinan berubah bentuk secara permanen

Berbeda dengan elemen segitiga dimana regangan konstan pada seluruh bagian elemen, pada elemen segiempat regangan berbeda-beda. Untuk menjawab pertanyaan apakah plat akan berubah bentuk secara permanen, kita perlu menentukan lokasi kritis, kemudian tegangan pada lokasi tersebut dihitung.

Ada dua lokasi kritis yaitu pada node 1 dan node 4. Pada contoh ini kita akan lihat node 1 saja.

Node 1: $\xi = -1$, $\eta = -1$

$$[D] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 30 & 20 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 30 & 20 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Determinan $|\mathbf{J}| = 150$

$$[\mathbf{A}] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix} = 1e^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,8 \\ 3,4 \\ -1,3 \\ 3,6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Tegangan pada node 1 adalah

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] [\mathbf{A}] [\mathbf{D}] [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 41,32 \\ 13,64 \\ 26,15 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Tegangan von Mises, σ' berdasarkan stress yang telah dihitung diatas adalah

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{41,32^2 + 13,64^2 - 41,32(13,64) + 3(26,15)^2} \\ &= 58,15 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Karena nilai von Misses stress ini lebih besar dari yield stress aluminium dengan beban yang ada, menurut teori plat akan berubah bentuk secara permanen.

5.6 Beban Merata (*Distributed Load*)

Untuk beban merata, beban ini perlu diubah menjadi beban yang terpusat pada node. Guna menjelaskan proses penurunannya kita gunakan contoh beban merata pada sisi 2-3 (*Gambar 5.4*). Disini kita ekspresikan beban ini menjadi sejajar sumbu x, p_x dan sumbu y, p_y . Kerja yang dilakukan oleh gaya ini pada elemen diberikan oleh

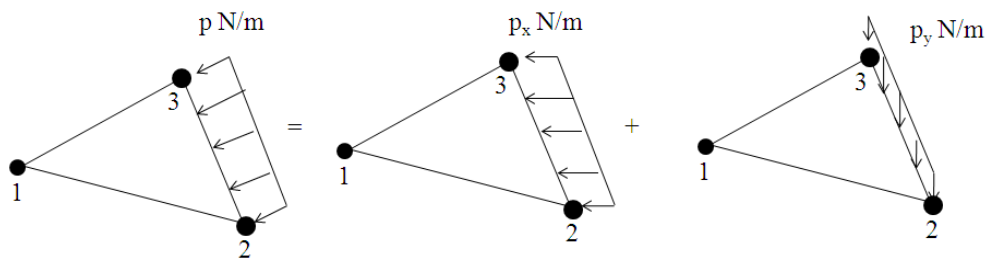
$$\begin{aligned}W^{(e)} &= \int_A \vec{u} \bullet \vec{p} \, dA \\ &= \int_A (u_x p_x + u_y p_y) \, dA \\ &= \int_A (u_x \ u_y) \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{x3} \ u_{y3}] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \\ S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \\ S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dA \\ &= \int_A [U]^T [S]^T \{p\} dA\end{aligned} \tag{5.53}$$

Derivatif dari $[W]$ terhadap pergeseran $[U]$ diberikan oleh

$$\left[\frac{\partial \mathbf{W}^{(e)}}{\partial \mathbf{U}} \right] = t \int_{l_{2-3}} [\mathbf{S}]^T \{\mathbf{p}\} dA \quad (5.54)$$

Setelah integrasi diterapkan kita peroleh

$$\left[\frac{\partial \mathbf{W}^{(e)}}{\partial \mathbf{U}} \right] = [\mathbf{F}] = t \frac{l_{2-3}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$



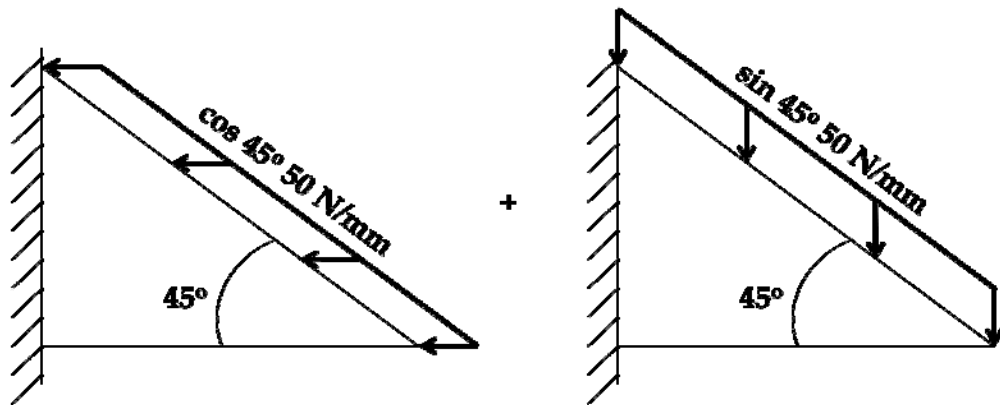
Gambar 5.4 Gaya dan pergeseran pada node-node elemen segitiga.

----- CONTOH 5.3 -----

Suatu plat yang tersangga dan terbebani oleh beban merata pada salah satu sisi. **Hitung:**

- Pergeseran maksimum plat, dan
- apakah ada kemungkinan plat untuk berubah bentuk secara permanen (*deformasi plastik*).

Beban ini kita pecah menjadi beban sejajar sumbu-x dan sumbu-y.



Dari contoh 5.1 telah kita peroleh

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = 600 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}]$$

$$= 1e^6 \begin{bmatrix} 1,379 & 0,687 & -1,033 & -0,346 & -0,346 & -0,341 \\ 0,687 & 1,379 & -0,341 & -0,346 & -0,346 & -1,033 \\ -1,033 & -0,341 & 1,033 & 0 & 0 & 0,341 \\ -0,346 & -0,346 & 0 & 0,346 & 0,346 & 0 \\ -0,346 & -0,346 & 0 & 0,346 & 0,346 & 0 \\ -0,341 & -1,033 & 0,341 & 0 & 0 & 1,033 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (5.55), beban tambahan pada node dari beban merata ini adalah $[\mathbf{F}]_{\text{tambahan}}$

$$[\mathbf{F}]_{\text{tambahan}} = t \frac{l_{2-3}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = 3 \frac{28,284}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 35,36 \\ 35,36 \\ 35,36 \\ 35,36 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1500 \\ 1500 \\ 1500 \\ 1500 \end{Bmatrix}$$

Sistim persamaan yang diperoleh adalah

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,3791 & 0,6870 & -1,0331 & -0,3461 & -0,3461 & -0,3409 \\ 0,687 & 1,3791 & -0,3409 & -0,3461 & -0,3461 & -1,0331 \\ -1,0331 & -0,3409 & 1,0331 & 0 & 0 & 0,3409 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3409 & -1,0331 & 0,3409 & 0 & 0 & 1,0331 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} = R_{x1} \\ F_{y1} = R_{y1} \\ F_{x2} = 1500 \\ F_{y2} = 1500 \\ F_{x3} = R_{x3} + 1500 \\ F_{y3} = R_{y3} + 1500 \end{Bmatrix}$$

Karena $u_{x1} = u_{y1} = u_{x3} = u_{y3} = 0$ dan $F_{x2} = 1500$ N dan $F_{y2} = 1500$ N, lajur satu, dua, lima dan enam dapat dieliminasi dari sistim.

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,033 & 0 \\ 0 & 0,346 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1500 \\ 1500 \end{Bmatrix}$$

a) **Pergeseran maksimum plat**

Solusi dari sistim persamaan ini memberikan pergeseran titik beban (*node 2*).

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = 1e^{-4} \begin{Bmatrix} 15 \\ 43 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

b) **Kemungkinan berubah bentuk secara permanen**

Tegangan pada elemen dihitung

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 15,65 \\ 17,05 \\ 49,60 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

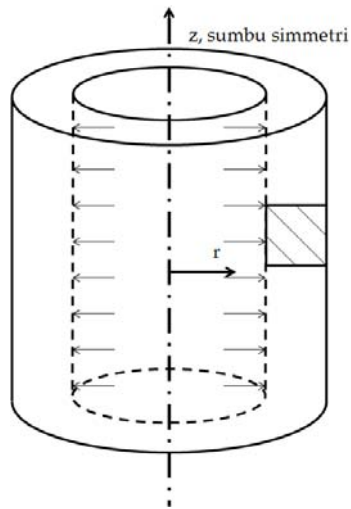
Dari stress ini kita hitung dulu von Misses stress, σ' berdasarkan tegangan yang telah dihitung diatas.

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \\ &= \sqrt{15,65^2 + 17,05^2 - 15,65(17,05) + 3(49,60)^2} \\ &= 87,46 \text{ MPa} \end{aligned}$$

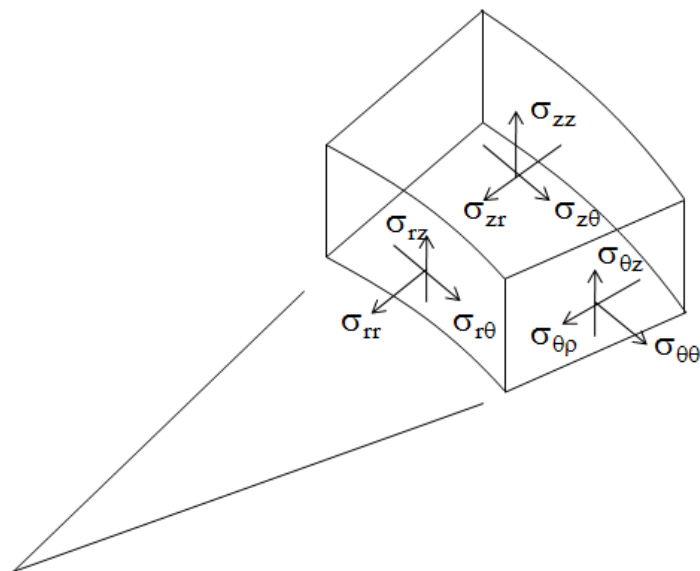
Karena yield stress aluminium berkisar antara 15 – 20 MPa, dan nilai tegangan von Mises yang lebih besar dari yield stress aluminium, menurut teori plat akan berubah bentuk secara permanen.

5.7 Benda Pejal Aksissimetris

Untuk benda pejal yang secara geometris dan beban simmetris terhadap sumbu rotasi (*Gambar 5.5*) problem dapat disederhanakan dengan menggunakan elemen 2-dimensi aksissimetris. Elemen tegangan pejal aksissimetris diilustrasikan pada gambar 5.6. Elemen ini hanya mempunyai empat stress nil-nol, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , dan σ_{rz} . Tegangan $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$.



Gambar 5.5 Solid revolusi dengan beban simmetris terhadap sumbu z.



Gambar 5.6 Stress pada elemen axissimetris.

Hukum Hooke untuk elemen ini adalah

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

Matrik konstitutif $[C]$ elemen ini adalah

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Dengan cara yang sama (5.13 - 5.16) hubungan antara regangan dan pergeseran diberikan oleh

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5.58)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.59)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (5.60)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (5.61)$$

Untuk elemen segitiga linear pergeseran elemen diberikan oleh persamaan (4.36)

$$u_r^{(e)} = S_1 u_{r1} + S_2 u_{r2} + S_3 u_{r3} \quad (5.62)$$

$$u_z^{(e)} = S_1 u_{z1} + S_2 u_{z2} + S_3 u_{z3} \quad (5.63)$$

Dengan menggunakan (5.58) – (5.63) vektor regangan dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial S_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial S_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial S_3}{\partial z} \\ \frac{S_1}{r} & 0 & \frac{S_2}{r} & 0 & \frac{S_3}{r} & 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial z} & \frac{\partial S_1}{\partial r} & \frac{\partial S_2}{\partial z} & \frac{\partial S_2}{\partial r} & \frac{\partial S_3}{\partial z} & \frac{\partial S_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r2} \\ u_{z2} \\ u_{r3} \\ u_{z3} \end{Bmatrix} \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Fungsi bentuk S_1 , S_2 dan S_3 telah diberikan oleh (4.37) – (4.39) sehingga

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \\ \frac{2AS_1}{r} & 0 & \frac{2AS_2}{r} & 0 & \frac{2AS_3}{r} & 0 \\ \delta_1 & \beta_1 & \delta_2 & \beta_2 & \delta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r2} \\ u_{z2} \\ u_{r3} \\ u_{z3} \end{Bmatrix} \quad (5.65)$$

Dimana $[B]$ diberikan

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 & 0 & \delta_3 \\ \frac{2AS_1}{r} & 0 & \frac{2AS_2}{r} & 0 & \frac{2AS_3}{r} & 0 \\ \delta_1 & \beta_1 & \delta_2 & \beta_2 & \delta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Energi regangan elemen aksissimetris

$$\begin{aligned}\Lambda^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] dv \\ &= \frac{2\pi}{2} \int_A [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] \bar{r} dA\end{aligned}\quad (5.67)$$

$\bar{r}$ pada persamaan (5.67) diberikan oleh r dari centroid, yang untuk elemen segitiga linear adalah

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad (5.68)$$

Pada lajur ke tiga dari matrik $[\mathbf{B}]$ terdapat term S_i/r , untuk memudahkan integrasi matrik ini, fungsi bentuk dan r dari centroid digunakan. Pada centroid elemen segitiga linear, $S_1 = S_2 = S_3 = 1/3$ dan r diberikan oleh (5.68)

Dengan menggabungkan (5.67) dengan kerja $\mathbf{W}^{(e)}$, energi potensial, $\Pi^{(e)}$ diperoleh. Selanjutnya dengan meminimumkan $\Pi^{(e)}$ dapat diperoleh sistim persamaan linear berikut.

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right] = 2\pi \bar{r} A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] - [\mathbf{F}] = \mathbf{0} \quad (5.69)$$

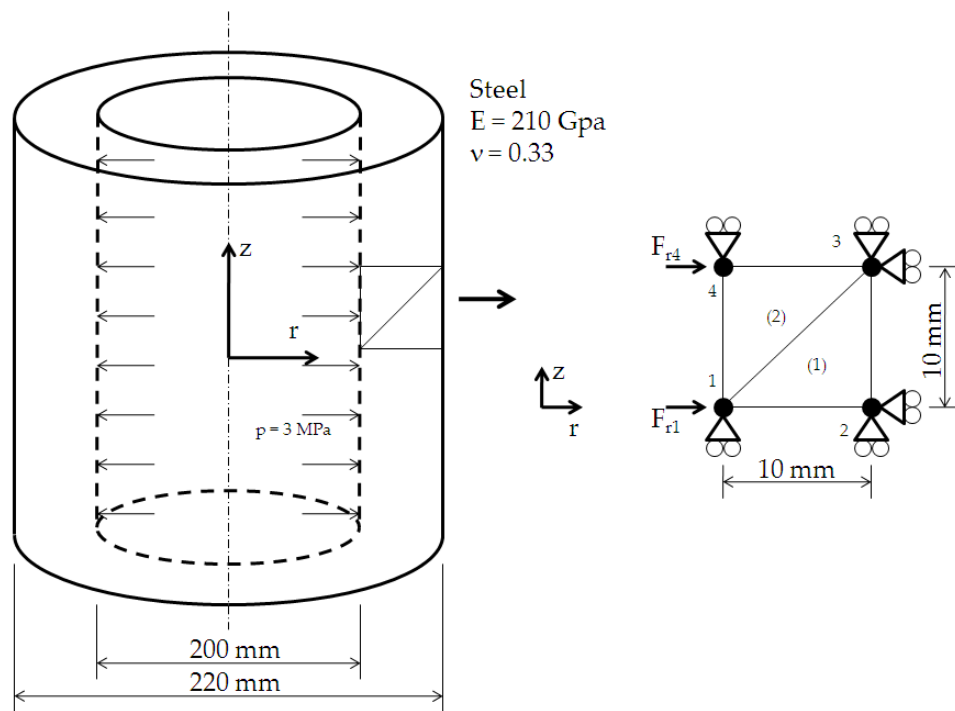
Dimana

$$[\mathbf{K}] = 2\pi \bar{r} A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \quad (5.70)$$

----- **CONTOH 5.4** -----

Contoh ini diadopsi dari referensi (*Chandrupatla, 2001*). Sebuah silinder dengan diameter dalam 200 mm dan diameter luar 240 mm berisi cairan dengan tekanan sebesar 3 Mpa. Dengan menggunakan dua elemen segitiga, **hitung**:

- (a) perubahan diameter dalam, dan
- (b) tegangan pada dinding silinder.



Pertama-tama kita hitung matrik konstitutifnya dengan menggunakan (5.57).

$$\begin{aligned}
 [C]^{(1)} = [C]^{(2)} &= \frac{200.000}{(1+0,33)(1-0,6)} \begin{bmatrix} 1-0,3 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1-0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 1-0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-0,3 \end{bmatrix} \\
 &= 3,846e^5 \begin{bmatrix} 1-0,3 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1-0,3 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 1-0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-0,3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tekanan pada sisi diameter dalam diterapkan dalam bentuk beban terpusat pada node 1 dan 4 sebesar

$$F_{r1} = F_{r4} = 2\pi r_{in} l_e p = 9,425e^3 \text{ N}$$

Elemen 1

Luas elemen ini adalah $A = 50 \text{ mm}^2$. Selanjutnya elemen-elemen matrik $[B]$ (5.66) dapat diperoleh dengan menggunakan koordinat node 1 (100,0), node 2 (110,0) dan node 3 (110,10).

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -10 & \delta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= 10 & \delta_2 &= -10 \\ \beta_3 &= 0 & \delta_3 &= 10\end{aligned}$$

Dengan menggunakan (5.68)

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = \frac{320}{3}$$

Matrik $[B]$ menurut (5.66),

$$[B]^{(1)} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 10 \\ \frac{100}{320} & 0 & \frac{100}{320} & 0 & \frac{100}{320} & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah $[B]$ dan $[C]$, $[K]$ dapat dihitung

$$[K]^{(1)} = 1e^8 \begin{bmatrix} u_{r1} & u_{z1} & u_{r2} & u_{z2} & u_{r3} & u_{z3} \\ 0,8789 & 0 & -0,9013 & 0,3746 & -0,0112 & -0,3746 \\ & 0,2578 & 0,2578 & -0,2578 & -0,2578 & 0 \\ & & 1,1850 & -0,6565 & -0,2448 & 0,3987 \\ & & & 1,160 & 0,2457 & -0,9022 \\ & \text{simmetri} & & & 0,2587 & 0,0121 \\ & & & & & 0,9022 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r2} \\ u_{z2} \\ u_{z3} \\ u_{r3} \end{matrix}$$

Elemen 2

Luas elemen ini adalah $A = 50 \text{ mm}^2$. Selanjutnya elemen-elemen matrik $[B]$ diperoleh dengan menggunakan koordinat node 1 (100,0), node 3 (110,10) dan node 4 (100,10).

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0 & \delta_1 &= -10 \\ \beta_2 &= 10 & \delta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= -10 & \delta_3 &= 10\end{aligned}$$

Dengan menggunakan (5.68),

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_3 + r_4}{3} = \frac{310}{3}$$

Matrik **[B]** menurut (5.66),

$$[B]^{(2)} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 100 & 0 & 100 & 0 & 100 & 0 \\ \frac{310}{3} & 0 & \frac{310}{3} & 0 & \frac{310}{3} & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

Setelah **[B]** dan **[C]**, **[K]** dapat dihitung

$$[K]^{(2)} = 1e^8 \begin{bmatrix} u_{r1} & u_{z1} & u_{r3} & u_{z3} & u_{r4} & u_{z4} \\ 0,2506 & -0,0121 & 0,013 & -0,2447 & -0,2609 & 0,2618 \\ & 0,874 & -0,3867 & 0 & 0,3625 & -0,874 \\ & & 0,8991 & 0 & -0,8731 & 0,3867 \\ & & & 0,2497 & 0,2497 & -0,2497 \\ & \text{simmetri} & & & 1,1005 & -0,6122 \\ & & & & & 1,1237 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r3} \\ u_{z3} \\ u_{z4} \\ u_{r4} \end{matrix}$$

Dengan menggabungkan $[K]^{(1)}$ dan $[K]^{(2)}$ sistim global diperoleh. Dikarena $u_{z1} = u_{z2} = u_{r2} = u_{z3} = u_{r3} = u_{z4} = 0$, lajur dua, tiga, empat, lima, enam dan delapan dapat dieliminasi dari sistim. Dan sistim yang kita perlu pecahkan adalah

$$1e^8 \begin{bmatrix} 1,1295 & -0,2609 \\ -0,2609 & 1,1005 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r4} \end{Bmatrix} = 1e^3 \begin{Bmatrix} 9,425 \\ 9,425 \end{Bmatrix}$$

Dari sistim ini hasil yang diperoleh adalah

$$\begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r4} \end{Bmatrix} = 1e^{-3} \begin{Bmatrix} 0,1092 \\ 0,1,115 \end{Bmatrix} \text{mm}$$

5.8 Efek dari Panas

Kita tahu bahwa perubahan suhu menyebabkan pemuaian atau penyusutan benda pejal. Hal ini menyebabkan adanya tambahan regangan yang umumnya dianggap sebagai regangan mula-mula (*initial strain*), ε_o dan berakibat adanya tambahan regangan pada hubungan antara tegangan dan regangan.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \quad (5.71)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \quad (5.72)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T \quad (5.73)$$

Dengan tambahan regangan ini, hubungan antara tegangan dan regangan menjadi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \varepsilon_o \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (5.74)$$

dimana,

$$[\varepsilon_o] = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

untuk problem tegangan bidang, dan untuk problem regangan bidang

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_0] = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\alpha\Delta T \\ (1+\nu)\alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

Formulasi energi regangan menjadi

$$\begin{aligned} \Lambda^{(e)} &= \frac{t}{2} \int_A [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0] dA \\ &= \frac{t}{2} \int_A \left([\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}] - 2[\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] + [\boldsymbol{\varepsilon}_0]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] \right) dA \\ &= \frac{t}{2} \int_A [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}] dA - t \int_A [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA + \frac{t}{2} \int_A [\boldsymbol{\varepsilon}_0]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA \end{aligned} \quad (5.77)$$

Integral pertama pada (5.77) sama dengan (5.30), sedangkan

$$-t \int_A [\boldsymbol{\varepsilon}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA = -t \int_A [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA \quad (5.78)$$

dan energi potensial total elemen

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= \Lambda^{(e)} - \mathbf{W}^{(e)} \\ &= \frac{t}{2} \int_A [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] dA - t \int_A [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA + \quad (5.79) \\ &\quad \frac{t}{2} \int_A [\boldsymbol{\varepsilon}_0]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dA - [\mathbf{U}]^T [\mathbf{F}] \end{aligned}$$

Dengan meminimumkan energi potensial total dapat didapat sistim persamaan linear berikut.

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right] = \mathbf{V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] - \mathbf{V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] - [\mathbf{F}] = \mathbf{0} \quad (5.80)$$

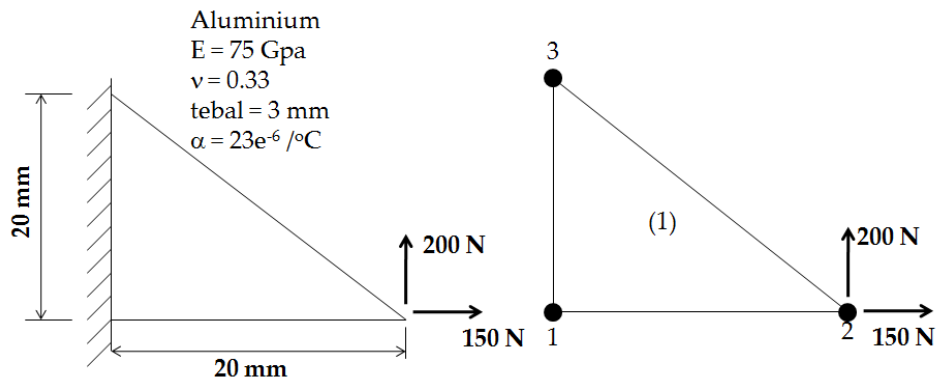
atau

$$[\mathbf{K}] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] + \mathbf{V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] \quad (5.81)$$

Jika dibandingkan dengan (5.34), pengaruh perubahan suhu menyebabkan tambahan term di vektor sisi kanan.

----- CONTOH 5.5 -----

Kita pecahkan contoh 5.1 kembali tetapi sekarang dengan perubahan suhu sebesar 100 °C.



Karena ketebalan plat lebih dari seperlima dimensi penampang problem ini dapat disederhanakan sebagai problem tegangan bidang. Regangan karena perubahan suhu untuk plane stress diberikan oleh (5.75).

$$[\epsilon_0] = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} = 23e^{-6} \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matrik-matrik $[C]$, $[B]$ dan kekakuan $[K]$ telah dihitung pada contoh 5.1.

$$[C]^{(1)} = 688,7e^3 \begin{bmatrix} 1 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,33}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B]^{(1)} = 0,0025 \begin{bmatrix} -20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -20 & -20 & 0 & 20 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}]^{(1)} &= 600 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \\
 &= 1e^6 \begin{bmatrix} 1,3791 & 0,6870 & -1,0331 & -0,3461 & -0,3461 & -0,3409 \\ 0,687 & 1,3791 & -0,3409 & -0,3461 & -0,3461 & -1,0331 \\ -1,0331 & -0,3409 & 1,0331 & 0 & 0 & 0,3409 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3409 & -1,0331 & 0,3409 & 0 & 0 & 1,0331 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sisi kanan ada tambahan term,

$$\mathbf{V}[\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_o] = \begin{Bmatrix} -63202 \\ -63202 \\ 63202 \\ 0 \\ 0 \\ 63202 \end{Bmatrix}$$

Sistim persamaan yang diperoleh adalah

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,3791 & 0,6870 & -1,0331 & -0,3461 & -0,3461 & -0,3409 \\ 0,687 & 1,3791 & -0,3409 & -0,3461 & -0,3461 & -1,0331 \\ -1,0331 & -0,3409 & 1,0331 & 0 & 0 & 0,3409 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3461 & -0,3461 & 0 & 0,3461 & 0,3461 & 0 \\ -0,3409 & -1,0331 & 0,3409 & 0 & 0 & 1,0331 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} = R_{x1} - 63202 \\ F_{y1} = R_{y1} - 63202 \\ F_{x2} = 150 + 63202 \\ F_{y2} = 200 \\ F_{x3} \\ F_{y3} = R_{y3} + 63202 \end{Bmatrix}$$

Karena $u_{x1} = u_{y1} = u_{x2} = u_{y2} = 0$ dan $F_{x2} = 150$ N dan $F_{y2} = 200$ N, lajur satu, dua, lima dan enam dapat dieliminasi dari sistim.

$$1e^6 \begin{bmatrix} 1,0331 & 0 \\ 0 & 0,3461 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 + 63202 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Pergeseran maksimum plat

Solusi dari sistim persamaan ini memberikan pergeseran dari titik loading (node 2).

$$\begin{Bmatrix} u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,06132 \\ 0,00058 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

Dari hasil ini, gaya-gaya reaksi pada node 1 dan 3 dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai u_{x2} dan u_{y2} ke sistim persamaan di atas.

Untuk elemen aksissimetris,

$$[\epsilon_o] = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.82)$$

Formulasi energi regangannya

$$\begin{aligned} \Lambda^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_V [\epsilon - \epsilon_o]^T [C] [\epsilon - \epsilon_o] dV \\ &= \frac{2\pi}{2} \int_A ([\epsilon]^T [C] [\epsilon] - 2[\epsilon]^T [C] [\epsilon_o] + [\epsilon_o]^T [C] [\epsilon_o]) r dA \\ &= \frac{2\pi}{2} \int_A [U]^T [B]^T [C] [B] [U] r dA - \frac{4\pi}{2} \int_A [U]^T [B]^T [C] [\epsilon_o] r dA + \frac{2\pi}{2} \int_A [\epsilon_o]^T [C] [\epsilon_o] r dA \end{aligned} \quad (5.83)$$

Dengan meminimumkan total energi potential ini untuk elemen segitiga linear diperoleh sistim persamaan linear berikut.

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial U} \right] = 2\pi \bar{r} A [B]^T [C] [B] [U] - 4\pi \bar{r} A [B]^T [C] [\epsilon_o] - [F] = 0 \quad (5.84)$$

dimana

$$[K] = 2\pi \bar{r} A [B]^T [C] [B] \quad (5.85)$$

Dan vektor sebelah kanan menjadi

$$[\mathbf{RHS}] = [\mathbf{F}] + 4\pi \bar{r} A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] \quad (5.86)$$

5.9 Soal-soal Latihan

1. Turunkan matrik konstitutif $[\mathbf{C}]$ persamaan (5.12) dari persamaan-persamaan (5.5) – (5.11).

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

2. Turunkan matrik konstitutif (5.21) untuk kondisi plane stress.

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

3. Turunkan matrik konstitutif (5.23) untuk kondisi plane strain.

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

4. Energi potensial total elemen diberikan oleh

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= \Lambda^{(e)} - W^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{U}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] dV - [\mathbf{U}]^T [\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dengan meminimumkan energi potensial total, turunkan sistim persamaan linear yang diberikan oleh persamaan (5.33).

$$\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right] = V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] [\mathbf{U}] - [\mathbf{F}] = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

5. Buktikan integral area pada persamaan (5.48)

$$\int_A () dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 () |J| d\xi d\eta$$

6. Buktikan

$$\left[\frac{\partial \mathbf{W}^{(e)}}{\partial \mathbf{U}} \right] = [\mathbf{F}] = t \frac{l_{2-3}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

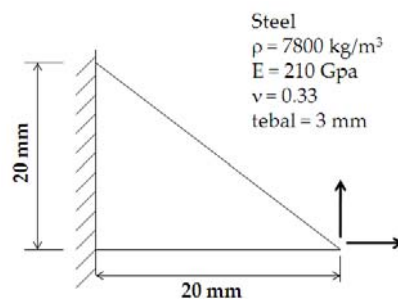
7. Turunkan regangan mula-mula untuk kondisi regangan bidang.

$$[\epsilon_o] = \begin{Bmatrix} (1+\nu)\alpha\Delta T \\ (1+\nu)\alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

8. Suatu plat yang tersangga dan terbebani pada salah satu ujung mengalami pergeseran. Hitung:

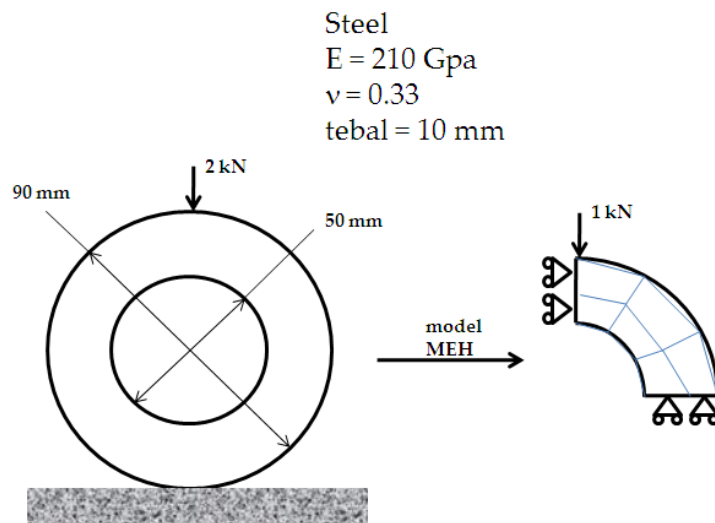
- (a) pergeseran maksimum plat,
- (b) apakah ada kemungkinan plat untuk berubah bentuk secara permanen (*deformasi plastik*).

Catatan soal ini hampir sama dengan contoh 5.1 tetapi disini berat dari plat tidak diabaikan.



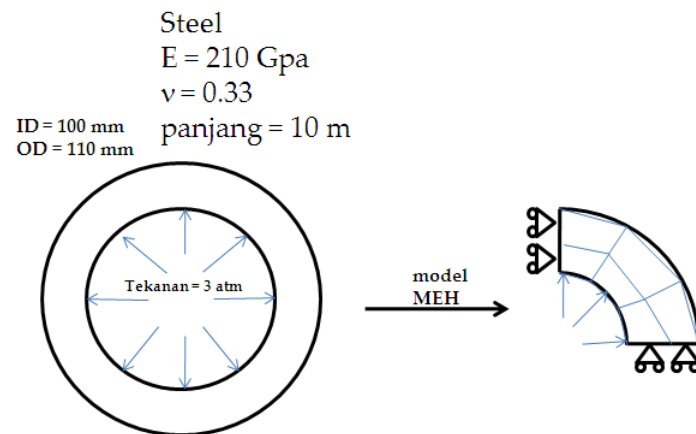
9. Sebuah disk dengan tebal 10mm terbebani secara radial sebesar 2 kN. Dengan menggunakan MEH dengan 6 elemen segiempat linear hitung:

- (a) pergeseran maksimum plat, dan
- (b) apakah ada kemungkinan plat untuk berubah bentuk secara permanen.



10. Seandainya disk pada soal 9 dipanaskan dahulu sampai suhu 150°C , ulangi perhitungan di atas dan bandingkan kedua hasil yang diperoleh.

11. Sebuah pipa dengan diameter dalam 100 mm, diameter luar 110 mm dan panjang 10 m. Dengan menggunakan asumsi regangan bidang hitung perubahan diameter dalam pipa.



12. Pecahkan problem pada contoh 5.4 dengan menggunakan satu elemen segiempat linear.